19/10/2017

Μάθημα 2ο

$A \in \mathbb{R}^{n,m}$: $n \times m$ πραγματικός πίνακας

$A \in \mathbb{C}^{n,m}$: $n \times m$ μιγαδικός πίνακας

A^T : ο ανάστροφος του A

A^H : ο συζυγής ανάστροφος : $A^H = (\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$

→ Ο A είναι συμμετρικός αν $A^T = A$

→ Ο A είναι ερμιτιανός αν $A^H = A$

→ Ο A^{-1} είναι ο αντίστροφος του A, αν A αντιστρέψιμος

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I.$$

Θεώρημα: Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Ο A είναι αντιστρέψιμος

(ii) $\det(A) \neq 0$

(iii) Οι γραμμές του A είναι γρ. ανεξάρτητες.

(iv) Οι στήλες του A είναι γρ. ανεξάρτητες.

(v) Το ομογενές γρ. σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση το $x = 0$.

(vi) Το γρ. σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση την $x = A^{-1} b$

→ $(A^T)^T = A$

→ $(A^H)^H = A$

→ $(A^{-1})^{-1} = A$

→ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

→ $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

→ $(AB)^T = B^T A^T$

→ $(AB)^H = B^H A^H$ → $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

➜ Ένας πίνακας A λέγεται <u>ορθογώνιος</u> αν $A^T A = AA^T = I$
$(A^T = A^{-1})$

• Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ έχει n ιδιοτιμές και $k \leq n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα
$Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, τότε λ ιδιοτιμή και x αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. $(x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\})$

n διακεκριμένες ιδιοτιμές ⇒ n διακεκριμένα ιδιοδιανύσ
Όταν όχι διακεκριμένες ⇒ μπορεί να υπάρχουν παραπάνω
πχ) n διπλή

$(A - \lambda I) = 0 \iff \det(A - \lambda I) = 0 \iff$
$P_n(\lambda) = 0 \Rightarrow$ Ο A έχει n ακριβώς ιδιοτιμές στον $\mathbb{C}$
Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ τότε n ιδιοτιμές πραγματικές ή ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών

Κάθε ερμιτιανός πίνακας στον $\mathbb{C}^{n,n}$ (συμμετρικός στον $\mathbb{R}^{n,n}$) έχει n πραγματικές ιδιοτιμές και n γρ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα τα οποία είναι
(ορθοκανονικά) ορθογώνια μεταξύ τους.
Αν $x^{(i)}$, $i = 1(1)n$ είναι ιδιοδιανύσματα του A τότε $(x^{(i)}, x^{(j)}) = 0 \quad \forall i \neq j$

ξεκινάμε από βήμα 1 σε βήμα 1

Κανονική Μορφή Jordan

Για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε : $A = SJS^{-1}$

(μετασχηματισμός ομοιότητας)

Δυο όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές

όπου $J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{bmatrix}$

με $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i, r_i}$

αν $k = n$ τότε : $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Σε κάθε block J_i αντιστοιχεί ακριβώς ένα ιδιοδιάνυσμα και $r_i - 1$ γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

Αν x ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ και $y \neq 0$ τ.ω. $Ay = \lambda y + x$ τότε y γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$Az = \lambda z + y$

J_1

$$J = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

J_2

Έχει 3 ιδιοδιανύσματα

→ 2 blocks της μορφής Jordan

J_3

Τα blocks είναι μοναδικά

Ο A έχει αριθμητική πολλαπλότητα της 1: 4 και γεωμετρική: 2

<u>Νόρμες Πινάκων</u>

Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n,n} \to \mathbb{R}^{+,0}$ είναι νόρμα αν ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \ \mathbb{C}^{n,n} \quad A = 0$ ανν $\|A\| = 0$

(ii) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|, \ \forall A \in \mathbb{C}^{n,n}, \ c \in \mathbb{C}$

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ για $\forall A, \ \in \mathbb{C}^{n,n}$ (τριγωνική)

(iv) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ (πολλαπλασιαστική)

<u>Φυσικές νόρμες</u>: παράγονται από διανυσματικές

Έστω $\|\cdot\|$ μια διανυσματική νόρμα τότε:

η ποσότητα $\|A\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$, είναι νόρμα

πίνακα και λέγεται φυσική νόρμα που παράγεται από τη διανυσματική.

- <u>Από τον ορισμό</u>: $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \iff \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

$x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

- $\|A \cdot B\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|ABx\|}{\|x\|} = \dfrac{\|ABy\|}{\|y\|} \leq \dfrac{\|A\| \cdot \|By\|}{\|y\|} \leq$

$\leq \dfrac{\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|y\|}{\|y\|} = \|A\| \, \|B\|$

- $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$

Αν $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ τότε $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ έχω

$\|y\| = \left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = \dfrac{\|x\|}{\|x\|} = 1$

$\forall x \; \exists y$ (*)

(*) $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = \|Ay\|$

$\forall y : \|y\| = 1 \quad \exists x \in \mathbb{C}^{n,n} : x = ay \, , \, a \in \mathbb{C}$

Το σύνολο $S = \{ x \in \mathbb{C}^n \ , \ \|x\| = 1 \}$: υπερσφαίρα
είναι συμπαγές (ενώ το $\mathbb{C}^n$ δεν είναι)
και η συνάρτηση $\|Ax\|$ είναι συνεχής στο S
επομένως υπάρχει μέγιστο

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Θεώρημα: Αν $\|\cdot\|$ είναι φυσική νόρμα, τότε
$\|I\| = 1$

απόδειξη: $\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$

Θεώρημα: $\rho(A) \leq \|A\|$ $\forall$ φυσική νόρμα, $\forall A \in \mathbb{C}^{n,n}$
$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$, λ_i ιδιοτιμή , $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n\}$

Έστω λ ιδιοτιμή του A και $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ το
αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.
Τότε $Ax = \lambda x \Rightarrow \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
$|\lambda| \cdot \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Longleftrightarrow |\lambda| \leq \|A\|$
Αυτό ισχύει για κάθε ιδιοτιμή λ του A, άρα και
για εκείνη που δίνει την $\rho(A)$: $\rho(A) \leq \|A\|$

Θεώρημα: $\forall A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $\varepsilon > 0$ $\exists$ φυσική νόρμα $\|\cdot\|$
τέτοια ώστε $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$

αντιπαράδειγμα: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 1$
$\rho(A) = 0$ αλλά $A \neq \mathbb{O}$, $\rho(A)$ δεν είναι νόρμα

Θεώρημα (Neumann):
Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και για κάποια φυσική νόρμα ισχύει $\|A\| < 1$. Τότε ο $(I-A)$ είναι αντιστρέψιμος και:

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

Απόδειξη

- Έστω $I-A$ μη αντιστρέψιμος τότε υπάρχει $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ τ.ω. $(I-A)x = 0$. Τότε:

$$(I-A)x = 0 \Leftrightarrow x = Ax \Rightarrow \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$
$$\Leftrightarrow \|A\| \geq 1 \quad \text{άτοπο}$$

Άρα $I-A$ αντιστρέψιμος.

- $I = (I-A)^{-1}(I-A) = (I-A)^{-1} - (I-A)^{-1}A$

$$1 = \|I\| = \|(I-A)^{-1} - (I-A)^{-1}A\| \leq$$
$$\leq \|(I-A)^{-1}\| + \|(I-A)^{-1}A\| \leq$$
$$\leq \|(I-A)^{-1}\| + \|(I-A)^{-1}\| \cdot \|A\| = \|(I-A)^{-1}\| (1+\|A\|)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I-A)^{-1}\|$$

- $1 = \|I\| = \|(I-A)^{-1} - (I-A)^{-1}A\| \geq$

$$\geq \|(I-A)^{-1}\| - \|(I-A)^{-1}A\| \geq$$
$$\geq \|(I-A)^{-1}\| - \|(I-A)^{-1}\| \cdot \|A\| = \|(I-A)^{-1}\| \cdot (1-\|A\|)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\|A\|} \geq \|(I-A)^{-1}\|$$

(i) > $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (κατά στήλες)

(ii) > $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (κατά γραμμές)

(iii) > $\|A\|_2 = \rho(A^H A)^{1/2}$

παράγεται από την ευκλείδεια νόρμα διανυσματική

<u>Απόδειξη για (i)</u>

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

$$= \max_{\|x\|_1=1} \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \max_{\|x\|_1=1} \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| =$$

$$= \max_{\|x\|_1=1} \|x\|_1 \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

όπου k τ.ω $\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

<u>Άρα:</u> $\|A\| \leq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Θεωρώ $y = e^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow k$, $\|y\|_1 = 1$. Τότε :

$$\|Ay\|_1 = \|a_k\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \|A\|_1$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$